9. Διανύσματα

9.1. Συμβολισμός

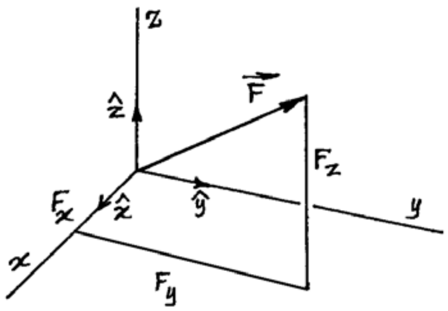
Ως ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων, ένα διάνυσμα συμβολίζεται στο τυπωμένο κείμενο με έντονο σύμβολο: $\mathbf{A}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{L}$,
ή βάζοντας ένα βέλος πάνω από το σύμβολο (έντονο ή μη): $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{L}}$, $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, $\vec{A}$, $\vec{L}$, $\vec{\upsilon}$.

Στο χειρόγραφο, τα διανύσματα ξεχωρίζονται βάζοντας ένα βέλος πάνω από το σύμβολο $\vec{A}$, $\vec{L}$, $\vec{\upsilon}$, ή υπογραμμίζοντάς το $\underline{A}$, $\underline{L}$, $\underline{\upsilon}$.

Στις σημειώσεις αυτές, συχνά θα συμβολίζουμε ένα διάνυσμα γράφοντας το μεν με έντονο γράμμα, αλλά και βάζοντας ένα βέλος πάνω από το σύμβολο, $\vec{\mathbf{F}}$ Το τελευταίο δεν είναι απαραίτητο, αλλά γίνεται για να συνηθίσει ο σπουδαστής που έρχεται σε επαφή με διανύσματα για πρώτη φορά να βάζει το βέλος πάνω από το σύμβολο του διανύσματος στο χειρόγραφο.

Τα μοναδιαία διανύσματα συμβολίζονται μερικές φορές με ένα «καπέλο»: $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{e}}$.

Στο *τρισορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων*, στο οποίο τα μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα στους άξονες x, y, z, συμβολίζονται, αντίστοιχα, με $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, ή $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$, ένα διάνυσμα συμβολίζεται με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:



$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$
ή
$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}\,. \qquad (9.1)$$

Π.χ., το *διάνυσμα θέσης* του σημείου (x, y, z) είναι:

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
ή
$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}\,. \qquad (9.2)$$

Οι F_x, F_y, F_z και x, y, z, είναι οι συνιστώσες των δύο διανυσμάτων, αντίστοιχα.
Ένας άλλος συμβολισμός είναι: $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$, $\vec{\mathbf{F}} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$.

9.2. Το μέτρο ενός διανύσματος

Το *μήκος* ή *μέτρο* ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{F}} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$ συμβολίζεται με $\left|\vec{\mathbf{F}}\right|$ και στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ισούται με

$$\left|\vec{\mathbf{F}}\right| \equiv \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,. \qquad (9.3)$$

Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{F}}$ γράφεται και ως F. Προφανώς $\left|\vec{\mathbf{F}}\right| = F \geq 0$.

9.3. Μοναδιαία διανύσματα

Το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{F}}$ είναι το

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{|\vec{\mathbf{F}}|} = \frac{F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \ . \tag{9.4}$$

Προφανώς είναι
$$|\hat{\mathbf{F}}| = \frac{|F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = 1 \tag{9.5}$$

και
$$\vec{\mathbf{F}} = |\vec{\mathbf{F}}|\,\hat{\mathbf{F}} = F\,\hat{\mathbf{F}} \ . \tag{9.6}$$

9.4. Πρόσθεση διανυσμάτων

Αν $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ και $\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$ είναι δύο διανύσματα, το άθροισμά τους ορίζεται ως το διάνυσμα:

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \equiv (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}} \ . \tag{9.7}$$

Επειδή, εξ ορισμού, $-\vec{\mathbf{B}} = (-B_x)\hat{\mathbf{x}} + (-B_y)\hat{\mathbf{y}} + (-B_z)\hat{\mathbf{z}}$, η διαφορά δύο διανυσμάτων είναι:

$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}}) = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z - B_z)\hat{\mathbf{z}} \ . \tag{9.8}$$

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες (m = βαθμωτό):

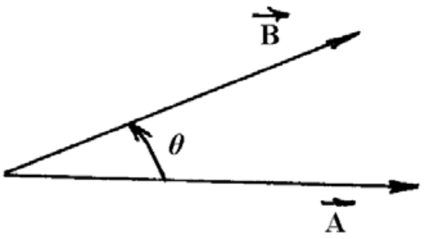
$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \qquad \vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}} \qquad m(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) = m\vec{\mathbf{A}} + m\vec{\mathbf{B}} \ . \tag{9.9}$$

Γεωμετρικά, η πρόσθεση δύο διανυσμάτων, $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$, γίνεται σύμφωνα με τον γνωστό *κανόνα του παραλληλογράμμου*.

9.5. Γινόμενα διανυσμάτων

9.5.1. *Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο*

Αν $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι δύο διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία όταν αυτά σχεδιαστούν με κοινή αρχή, το *βαθμωτό ή εσωτερικό τους γινόμενο* συμβολίζεται με $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ και ορίζεται ως το βαθμωτό μέγεθος



$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta \ . \tag{9.10}$$

Γεωμετρικά, αυτό ισούται με το γινόμενο του μέτρου A του $\vec{\mathbf{A}}$ επί το προσεσημασμένο μήκος $B\cos\theta$ της προβολής του $\vec{\mathbf{B}}$ στην κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{A}}$. Ομοίως με ανταλλαγή των A και B.

Για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες (m = βαθμωτό):

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}} \qquad \vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}} \qquad m(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) = (m\vec{\mathbf{A}})\cdot\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}}\cdot(m\vec{\mathbf{B}}) \ . \tag{9.11}$$

Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα, $\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{A}} = 1$. (9.12)

Έτσι, $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 1, \quad \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = 1, \quad \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1$. (9.13)

Επίσης, $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = 0, \quad \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = 0, \quad \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0$ (9.14)

λόγω καθετότητας.

Κάνοντας χρήση αυτών των σχέσεων, βρίσκουμε ότι για τα δύο διανύσματα $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ και $\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$ είναι:

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \ . \tag{9.15}$$

Ειδικά,

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{A}} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|^2 = A^2 \ . \tag{9.16}$$

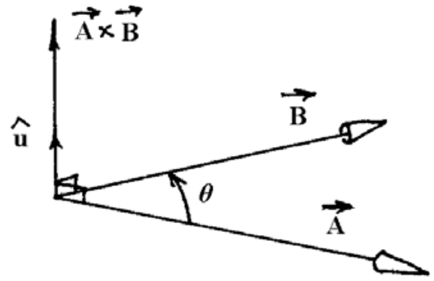
Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου, η γωνία θ μεταξύ δύο διανυσμάτων δίνεται από τη σχέση:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}}{AB} \qquad (\,0 \le \theta < \pi\,). \tag{9.17}$$

Αν είναι $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$, και κανένα από τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε τα δύο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

9.5.2. *Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο*

Αν $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι δύο διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, τέτοια ώστε $0 \le \theta < \pi$, το *διανυσματικό ή εξωτερικό τους γινόμενο* συμβολίζεται με $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$ και ορίζεται ως το διανυσματικό μέγεθος



$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} = AB\sin\theta\ \hat{\mathbf{u}}\ , \tag{9.18}$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{u}}$ είναι κάθετο στα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ και έχει κατεύθυνση αυτήν προς την οποία κινείται μια δεξιόστροφη βίδα που περιστρέφεται κατά την ίδια φορά που θα πρέπει να περιστραφεί το πρώτο διάνυσμα, $\vec{\mathbf{A}}$, για να συμπέσει με το δεύτερο, $\vec{\mathbf{B}}$, ακολουθώντας τη μικρότερη γωνία.

Η σειρά με την οποία γράφονται τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ είναι επομένως καθοριστική για την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$.

Τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ και $\hat{\mathbf{u}}$ (με αυτήν τη σειρά) λέγεται ότι αποτελούν ένα *δεξιόστροφο σύστημα*. Αυτό σημαίνει ότι το $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$ έχει την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{u}}$, το $\vec{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{u}}$ έχει την κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{A}}$ και το $\hat{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{A}}$ έχει την κατεύθυνση του $\vec{\mathbf{B}}$.

Για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες (m = βαθμωτό):

$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}} \qquad \vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{C}} \qquad m(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}) = (m\vec{\mathbf{A}})\times\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}}\times(m\vec{\mathbf{B}}) \tag{9.19}$$

Για κάθε διάνυσμα,

$$\hat{\mathbf{A}}\times\hat{\mathbf{A}} = 0\,. \tag{9.20}$$

Έτσι,

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} = 0,\quad \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}} = 0,\quad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = 0\,. \tag{9.21}$$

Επίσης,

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}},\quad \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{z}},\quad \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}},\quad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}},\quad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}},\quad \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}\ . \tag{9.22}$$

> *Μνημονικός κανόνας*:
> Σε ένα εξωτερικό γινόμενο δύο διαφορετικών μοναδιαίων διανυσμάτων, της μορφής $\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$, το πρόσημο του αποτελέσματος είναι θετικό αν η σειρά των διανυσμάτων είναι αυτή που εμφανίζεται στη διάταξη $\hat{\mathbf{x}}\to\hat{\mathbf{y}}\to\hat{\mathbf{z}}\to\hat{\mathbf{x}}\to\hat{\mathbf{y}}$. Διαφορετικά είναι αρνητικό.

Κάνοντας χρήση αυτών των σχέσεων, βρίσκουμε ότι για τα δύο διανύσματα $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ και $\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$ είναι:

$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}\ . \tag{9.23}$$

Συνοπτικά,
$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\,. \qquad (9.24)$$

Η απόλυτη τιμή $AB|\sin\theta|$ του εξωτερικού γινομένου $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$ είναι ίση με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{u}}$ καθορίζει τον 'προσανατολισμό' της επιφάνειας $\vec{\mathbf{S}}\equiv\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$.

Αν είναι $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=\mathbf{0}$, και κανένα από τα $\vec{\mathbf{A}}$ και $\vec{\mathbf{B}}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα.

Παράδειγμα 1

Αν $\vec{\mathbf{A}}=3\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}+2\hat{\mathbf{z}}$ και $\vec{\mathbf{B}}=2\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}}$, να βρεθεί το $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$.

$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-\hat{\mathbf{x}}+7\hat{\mathbf{y}}+5\hat{\mathbf{z}}\,.$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η *ροπή* της δύναμης $\vec{\mathbf{F}}=F_x\hat{\mathbf{x}}+F_y\hat{\mathbf{y}}+F_z\hat{\mathbf{z}}$ ως προς το σημείο (0, 0, 0), $\vec{\mathbf{N}}\equiv\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$.

Επειδή $\vec{\mathbf{r}}=x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}+z\hat{\mathbf{z}}$, είναι

$$\vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix}y & z\\ F_y & F_z\end{vmatrix}-\hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix}x & z\\ F_x & F_z\end{vmatrix}+\hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix}x & y\\ F_x & F_y\end{vmatrix}=$$
$$=\left(yF_z-zF_y\right)\hat{\mathbf{x}}+\left(zF_x-xF_z\right)\hat{\mathbf{y}}+\left(xF_y-yF_x\right)\hat{\mathbf{z}}\,.$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο Q που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}=\upsilon_x\hat{\mathbf{x}}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathbf{B}}=B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}}$.

Η μαγνητική δύναμη (Lorentz) είναι:

$$\vec{\mathbf{F}}=Q\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}=Q\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ \upsilon_x & 0 & 0\\ 0 & B_y & B_z\end{vmatrix}=$$
$$=Q\,\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix}0 & 0\\ B_y & B_z\end{vmatrix}-Q\,\hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix}\upsilon_x & 0\\ 0 & B_z\end{vmatrix}+Q\,\hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix}\upsilon_x & 0\\ 0 & B_y\end{vmatrix}=Q\,\upsilon_x\left(-B_z\hat{\mathbf{y}}+B_y\,\hat{\mathbf{z}}\right).$$

9.5.3. Τριπλά γινόμενα

Από τα δυνατά τριπλά γινόμενα διανυσμάτων, αυτά που έχουν νόημα είναι τα εξής:

$$(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}} \qquad \vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}) \qquad \vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})\,.$$

Το $(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}$ είναι απλώς το γινόμενο του διανύσματος $\vec{\mathbf{C}}$ επί το βαθμωτό μέγεθος $(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})$.

Το *βαθμωτό τριπλό* ή *βαθμωτό μικτό γινόμενο* $\vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})$ μπορεί να γραφτεί και χωρίς τις παρενθέσεις (αφού το γινόμενο $(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})\times\vec{\mathbf{C}}$ δεν έχει νόημα). Αποδεικνύεται ότι είναι

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{9.25}$$

και το μέτρο του, $\left|\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}\right|$, ισούται με τον ‘όγκο’ του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ και $\vec{\mathbf{C}}$, εκπεφρασμένο στις κατάλληλες μονάδες.

Τέλος,

$$\vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}) - \vec{\mathbf{C}}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) \tag{9.26}$$

είναι το *διανυσματικό τριπλό* ή *διανυσματικό μικτό γινόμενο* των $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ και $\vec{\mathbf{C}}$.

Παράδειγμα 4

Αν $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$, $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$ και $\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$, να βρεθεί το $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}$.

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 7 + 10 = 2$$

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που καθορίζεται από τα τρία διανύσματα θέσης $\vec{\mathbf{r}}_1$, $\vec{\mathbf{r}}_2$ και $\vec{\mathbf{r}}_3$.

Ο όγκος είναι $V = \left|\vec{\mathbf{r}}_1\cdot\vec{\mathbf{r}}_2\times\vec{\mathbf{r}}_3\right|$, δηλαδή είναι ίσος με την απόλυτη τιμή του

$$\vec{\mathbf{r}}_1\cdot\vec{\mathbf{r}}_2\times\vec{\mathbf{r}}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Προβλήματα

1 Να δειχθεί ότι η ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\vec{\mathbf{F}}$ και $-\vec{\mathbf{F}}$ που ασκούνται στα σημεία $\vec{\mathbf{r}}_1$ και $\vec{\mathbf{r}}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται. (Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο είναι $\vec{\mathbf{N}} \equiv \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$, όπου $\vec{\mathbf{r}}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη).

2 Ποια είναι η συνθήκη για να είναι τα διανύσματα $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ και $\vec{\mathbf{C}}$ συνεπίπεδα;

3 Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των οριζουσών για να δείξετε ότι $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{C}}$.

4 Να αποδειχθεί ότι: $\vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}) - \vec{\mathbf{C}}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})$.

Βιβλιογραφία

I. S. Sokolnikoff και R. M. Redheffer, *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001. Κεφ. 4.

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982. Κεφ. 7.

M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Vector Analysis*. Schaum Publishing Co. 1959 κ.ε.